Berkala Ilmiah FMIPA – UGM, Tahun V, No. 1, Januari 1994
hal. 61 – 65

KETERTUTUPAN KELAS DISTRIBUSI IFRA *)

Sardjono dan Suryo Guritno

Jurusan Matematika, FMIPA – UGM, Yogyakarta 55281

INTISARI

Dieksplorasi distribusi yang mempunyai kecepatan kegagalan naik (*IFR*) dan rata-rata kecepatan kegagalan naik (*IFRA*) beserta sifat-sifatnya. Selanjutnya dengan menggunakan suatu lemma dibuktikan ketertutupan kelas distribusi *IFRA* terhadap konvolusi.

Kata-kata kunci : kecepatan kegagalan naik (*IFR*), rata-rata kecepatan kegagalan naik (*IFRA*), konvolusi

The Closure of Distribution Class with IFRA

ABSTRACT

The distribution with increasing failure rate (IFR) and increasing failure rate average (IFRA) with their properties are explored. The closure of IFRA distribution class with respect to convolution is then proved.

Keywords : increasing failure rate (IFR), increasing failure rate average (IFRA), convolution.

I. PENDAHULUAN

Kelas distribusi yang mempunyai rata-rata kecepatan kegagalan naik atau *increasing failure rate average* (*IFRA*) telah menjadi sangat penting dalam teori reliabilitas. Mula-mula kelas ini diperkenalkan oleh Birnbaum, Esary dan Marshal (1966), dan mereka menamakannya dengan *increasing hazard rate average* (*IHRA*). Pentingnya kelas ini dan sifat-sifatnya telah dibicarakan oleh Barlow dan Proschan (1975). Sifat-sifat penting lain kelas distribusi ini masih perlu dikaji lebih lanjut.

Penelitian ini dilakukan untuk mengeksplorasi sifat-sifat distribusi yang mempunyai kecepatan kegagalan naik atau *increasing failure rate* (*IFR*), dan distribusi yang mempunyai IFRA. Dengan menggunakan suatu lemma yang buktinya memakai ketaksamaan Minkowski (Seperti dalam Hewitt dan Stromberg (1965)), dibuktikan ketertutupan kelas distribusi IFRA terhadap konvolusi.

II. CARA PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dengan telaah-pustaka. Dari pustaka yang dipelajari

*) Dibiayai dengan dana OPF FMIPA-UGM 1992/1993

dieksplorasi sifat-sifat distribusi *IFR* dan *IFRA*. Bukti ketertutupan kelas distribusi dilakukan dengan menggunakan sifat-sifat integral dalam analisis real, dengan pertolongan sebuah lemma.

III. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Misalkan X adalah tahan hidup unit dan F adalah distribusi hidup unit, yaitu distribusi hidup dari X. *Reliabilitas* atau *probabilitas survival* suatu unit baru sampai dengan waktu x dengan penulisan $F(x)$ didefinisikan sebagai

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x).$$

Reliabilitas bersyarat unit umur t adalah

$$\bar{F}(x \mid t) = \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)}, \quad \bar{F}(t) > 0.$$

$\bar{F}(x)$ menyatakan probabilitas bahwa unit baru masih tetap hidup sampai dengan waktu x, dan $\bar{F}(x \mid t)$ menyatakan probabilitas bahwa unit yang diketahui sudah berumur t, masih tetap hidup sampai dengan waktu $t + x$.

Probabilitas bersyarat kegagalan dalam interval waktu x suatu unit yang berumur t adalah

$$F(x \mid t) = \frac{F(t+x) - F(t)}{\bar{F}(t)} = 1 - \bar{F}(x \mid t),$$

sehingga kecepatan kegagalan bersyarat pada saat t adalah

$$r(t) = \lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x} \, \frac{F(t+x) - F(t)}{\bar{F}(t)} \right] = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} \qquad (3.1)$$

$r(t)$, disebut juga *hazard rate* atau *intensity rate*.

Dengan mengintegralkan (3.1) diperoleh

$$\int_0^x r(t)\,dt = -\log \bar{F}(x)$$

atau

$$\bar{F}(x) = \exp\left\{ -\int_0^x r(t)\,dt \right\}. \qquad (3.2)$$

Kecepatan kegagalan kumulatif,

$$R(x) = \int_0^x r(t)\,dt$$

disebut fungsi *hazard*. Pers. (3.2) dapat ditulis sebagai

$$\bar{F}(x) = \exp\{ -R(x) \} \qquad (3.3)$$

Misalkan

$\bar{F}(x \mid t) = \bar{F}(t+x) / \bar{F}(t)$ turun dalam interval $0 < t < \infty$ untuk semua $x \geq 0$.

Akibatnya

$$r(t) = \lim_{x \to 0} \left\{ \frac{1}{x} \, \frac{F(t+x) - F(t)}{\bar{F}(t)} \right\} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \left\{ 1 - \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)} \right\}$$

naik dalam $t \geq 0$. Sebaliknya, jika $r(t)$ naik maka

$$\bar{F}(x \mid t) = \exp\left\{ -\int_0^{t+x} r(u)\,du \right\}$$

turun dalam interval $t \geq 0$ untuk semua

$x \geq 0$. Jadi $\bar{F}(x \mid t)$ turun dalam $t > 0$ untuk semua $x \geq 0$ jika dan hanya jika $r(t)$ naik dalam t.

Definisi 1

F disebut distribusi dengan kecepatan kegagalan naik atau *increasing failure rate* (*IFR*) jika $\bar{F}(x \mid t)$ turun dalam $t \geq 0$ untuk semua $x \geq 0$. Keadaan sebaliknya F disebut distribusi dengan kecepatan kegagalan turun atau *decreasing failure rate* (*DFR*) jika $\bar{F}(x \mid t)$ naik dalam $t \geq 0$ untuk semua $x \geq 0$.

Contoh-contoh :

1. Distribusi eksponensial,

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

mempunyai kecepatan kegagalan bersyarat,

$$r(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda, \text{ konstan.}$$

Distribusi eksponensial adalah *IFR* maupun *DFR*.

2. Distribusi Weibull,

$$F_\alpha(t) = 1 - \exp\{-(\lambda t)^\alpha\};\ t \geq 0;\ \lambda, \alpha > 0$$

mempunyai

$$r(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = \alpha \lambda (\lambda t)^{\alpha - 1}, \ t > 0.$$

Jadi distribusi Weibull F_α adalah *IFR* untuk $\alpha \geq 1$ dan *DFR* untuk $\alpha \leq 1$. Untuk $\alpha = 1$, $F_\alpha(t) = 1 - e^{-\alpha t}$ adalah distribusi eksponensial.

3. Distribusi gamma,

$$g_{\lambda,\alpha}(t) = \lambda^\alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} / \Gamma(\alpha);\ t \geq 0, \alpha > 0$$

mempunyai $r(t)$ dengan

$$1/r(t) = \int_0^\infty (1 + u/t)^{\alpha-1} e^{-\lambda u}\,du$$

Jadi $1/r(t)$ naik untuk $0 < \alpha \leq 1$ dan turun untuk $\alpha > 1$, sehingga $G_{\lambda,\alpha}$ adalah *DFR* untuk $0 < \alpha \leq 1$ dan *IFR* untuk $\alpha > 1$. Untuk $\alpha = 1$, $G_{\lambda,\alpha} = 1 - e^{-\lambda t}$ adalah distribusi eksponensial.

Definisi 2.

Suatu fungsi $h(x)$, $-\infty < x < \infty$ disebut fungsi frekuensi Polya order 2 (*PF*) jika memenuhi syarat

a). $h(x) \geq 0$ untuk $-\infty x < \infty$

b). $\begin{vmatrix} h(x_1 - y_1) & h(x_1 - y_2) \\ h(x_2 - y_1) & h(x_2 - y_2) \end{vmatrix} \geq 0$

untuk semua $-\infty < x_1 < x_2 < \infty$ dan $-\infty < y_1 < y_2 < \infty$.

Syarat b) dalam definisi di atas ekivalen dengan

b') $\log h(x)$ adalah cekung $-\infty < x < \infty$ atau

b") untuk $\Delta > 0$, $h(x + \Delta) / h(x)$ turun dalam x untuk $a < x < b$ dengan

$$a \approx \inf_{h(y)>0} y \quad \text{dan} \quad b \approx \sup_{h(y)>0} y$$

Teorema 1 :

Misalkan F suatu fungsi distribusi, maka F adalah *IFR* jika dan hanya jika $\bar{F}$ adalah PF_2.

Bukti diperoleh langsung dari definisi *IFR* dan b").

Lemma 1 :

Jika f suatu fungsi kepadatan probabilitas dan f adalah PF_2 pada $[\,0, \infty\,)$, maka fungsi distribusi $F(t) = \int_0^t f(x)\,dx$ adalah *IFR*.

Bukti :

Untuk membuktikan $r(t) = f(t)/\bar{F}(t)$ naik dalam t, cukup diperlihatkan bahwa untuk $t_1 < t_2$.

$$0 \geqslant \begin{vmatrix} f(t_1) & f(t_2) \\ \bar{F}(t_1) & \bar{F}(t_2) \end{vmatrix}$$

$$= \int_0^\infty \begin{vmatrix} f(t_1) & f(t_2) \\ f(t_1+x) & f(t_2+x) \end{vmatrix} dx$$

Karena f adalah PF_2 maka determinan tersebut ≤ 0. Jadi F adalah *IFR*.

Analogi dengan lemma 1 adalah lemma berikut :

Lemma 2 :

Jika f adalah fungsi kepadatan probabilitas pada $[\,0, \infty\,)$ dan log $f(x)$ cembung maka fungsi distribusi $F(t) = \int_0^t f(x)\,dx$ adalah *DFR*.

Definisi 3.

Suatu fungsi distribusi F dikatakan mempunyai rata-rata kecepatan kegagalan naik atau *increasing failure rate average* (*IFRA*) jika $-t^{-1}\log \bar{F}(t)$ naik dalam $t \geq 0$. Sebaliknya F dikatakan mempunyai rata-rata kecepatan kegagalan turun atau *decreasing failure rate average* (*DFRA*) jika $-t^{-1}\log \bar{F}(t)$ turun dalam $t \geq 0$. Cukup jelas bahwa jika F adalah distribusi *IFRA* maka $\{\bar{F}(t)\}^{1/t}$ turun pada $[0, \infty)$, sedangkan jika F adalah distribusi *DFRA* maka $\{\bar{F}(t)\}^{1/t}$ naik pada $[\,0,1\,)$. Oleh karena itu definisi mengenai *IFRA* dan *DFRA* dinyatakan sebagai berikut.

Definisi 4.

Fungsi distribusi F adalah *IFRA* jika dan hanya jika $F(\alpha t) \geq \bar{F}^\alpha(t)$ untuk semua $0 < \alpha < 1$ dan $t \geq 0$; dan F adalah *DFRA* jika dan hanya jika $\bar{F}(\alpha t) \leq \bar{F}^\alpha(t)$ untuk semua $0 < \alpha < 1$ dan $t \geq 0$.

Lemma 3.

F adalah *IFRA* jika dan hanya jika

$$\int h(x)\,dF(x) \leq \left[\,\int h(x/\alpha)\,dF(x)\,\right]^{1/\alpha},$$

untuk semua $0 < \alpha < 1$ dan semua fungsi tak turun $h \geq 0$.

Bukti :

Misalkan F adalah *IFRA*. Dari definisi 4 maka untuk $0 < \alpha < 1$ dan $t \geq 0$ berlaku

$$\int I_{(t,\infty)}(x)\,dF(x) \leq \left[\,\int I^\alpha_{(t,\infty)}(x/\alpha)\,dF(x)\,\right]^{(1/\alpha)}. \quad (3.4)$$

Secara umum, misalkan

$$\varphi(x) = \Sigma_{i=1}^n a_i I_{(t_i,\infty)}(x) \quad (3.5)$$

dengan $a_i \geq 0$, $0 \leq t \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n < \infty$. Dari (3.4) didapat

$$\int \varphi(x)\,dF(x) \leq \sum_{i=1}^n \left[\,\int a_i^\alpha I_{(t,\infty)}(x/\alpha)\,dF(x)\,\right]^{1/\alpha}.$$

Dengan menggunakan ketaksamaan Minkowski untuk $0 < \alpha < 1$, didapat

$$\int \varphi(x)\,dF(x) \leq \sum_{i=1}^n \| a_i^\alpha I_{(t_i,\infty)}(x/\alpha) \|_\alpha$$

$$\leq \| \sum_{i=1}^n a_i I_{(t_i,\infty)}(x/\alpha) \|_\alpha$$

$$= \left[\,\int \varphi^\alpha(x/\alpha)\,dF(x)\,\right]^{1/\alpha}.$$

Lemma terbukti untuk fungsi dari bentuk (3.5). Berhubung fungsi tak turun tak negatif $h(x)$ dapat diperoleh dari limit tak turun fungsi-fungsi $\varphi(x)$, maka lemma 3 terbukti berdasarkan teorema konvergensi monoton Lebesgue.

Hasil utama penelitian ini diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 2.

Kelas fungsi-fungsi distribusi IFRA adalah tertutup terhadap konvolusi.

Bukti :

Misalkan F dan G adalah *IFRA* dan misalkan $H = F * G$, yaitu konvolusi dari F dan G. Misalkan h adalah fungsi tak turun tak negatif dan misalkan $0 < \alpha < 1$. Perhatikan kemudian

$$\int h(Z)\,dH(Z) = \int\int h(x+y)\,dF(x)\,dG(y).$$

Karena F adalah *IFRA*, dan untuk y tertentu $h(x+y)$ tak turun tak negatif dalam x maka menurut lemma 3

$$\int h(Z)\,dH(Z) \leq$$

$$\int \left[\left[\,\int h^\alpha(x/\alpha + y)\,dF(x)\,\right]^{1/\alpha} \right] dG(y).$$

dan karena G adalah *IFRA*, maka menurut lemma 3 pula

$$\int h(Z)\,dH(Z) \leq$$

$$\left[\,\int\int h^\alpha((x+y)/\alpha)\,dF(x)\,dG(x)\,\right]^{1/\alpha}$$

$$= \left[\,\int h^\alpha(Z/\alpha)\,dH(Z)\,\right]^{1/\alpha}.$$

Dengan demikian teorema terbukti.

IV. KESIMPULAN

Kelas distribusi IFRA tertutup terhadap konvolusi.

DAFTAR PUSTAKA

Barlow, R. E and F. Proschan, 1975 : ***Statistical Theory of Reliability and Life Testing***, Holt, Rinehart and Winston, New York.

Birnbaum, Z. W., J. D. Esary dan A. W. Marshall, 1966 : ***Stochastic characterization of wearout for components and systems***, *Ann. Math. Statist.* 37, 816 -825.

Hewitt, E dan K. Stromberg, 1965 : ***Real and Abstract Analysis***, Springer-Verlag, New York.